

FISICA E BIOLOGIA, STORIA DI UN MODELLO

Diego Gonzalez

Musical and Architectural Acoustics Laboratory

FSSG-CNR

Isola di San Giorgio Maggiore c/o Fondazione Cini

30124 Venezia

e-mail diego.gonzalez@cini.ve.cnr.it

Sommario

I recenti sviluppi della biologia propongono una sfida senza precedenti, che comporta la sistematizzazione e l'interpretazione dell'enorme mole di dati che essa sta producendo. Parallelamente, sta avvenendo una rivoluzione nello studio dei sistemi complessi, che origina dalle scienze fisico-matematiche. La scoperta fondamentale in questo campo è che complessità del modello e complessità del suo comportamento non sono necessariamente sinonimi: sistemi semplici possono comportarsi in modo molto complesso. In questo modo si è aperta una finestra per lo studio teorico dei sistemi complessi per quanto riguarda la caratterizzazione degli aspetti dinamici che comincia ad interessare anche i problemi di organizzazione spaziale. Infatti, l'interesse attuale è focalizzato soprattutto nella formazione di strutture spaziali e la loro caratterizzazione dal punto di vista dinamico. Nonostante questi ultimi sviluppi rappresentino dei segni positivi di avvicinamento tra le scienze fisico-matematiche e la biologia, importanti barriere si interpongono ancora tra queste discipline, rallentando l'affermarsi di una vera e feconda attività interdisciplinare. In questo articolo si descrive l'esperienza personale dell'autore nello sviluppo di un modello della percezione uditiva, con l'intenzione di esemplificare e promuovere questo tipo di approccio multidisciplinare ai problemi di natura dinamica in biologia.

Introduzione

Una recente nota editoriale della rivista Nature dal provocante titolo: “*Può la Fisica produrre una nuova rivoluzione nella biologia?*”⁽¹⁾, analizza molto lucidamente le attuali sfide che si affacciano sul campo d’indagine collocato tra le scienze biologiche e quelle fisico-matematiche. L’articolo sopra citato parte dalle problematiche legate all’analisi e alla gestione dei grandi quantitativi di dati che le più recenti tecniche della biologia molecolare stanno producendo. Ad esempio, grazie alla tecnologia di “microarray” del DNA, sta già divenendo routine il monitoraggio dell’espressione perfino di 10.000 geni in un solo esperimento. Oltre al problema della gestione di tali enormi quantitativi di dati, al quale l’informatica e la scienza dei computer stanno dando un contributo essenziale, i biologi cominciano a sentire la necessità di disporre di nuovi modi d’interpretazione degli stessi, e diventa sempre più chiaro che fisici e matematici possono fornire un contributo sostanziale a tale proposito. Ciò nonostante, rimangono ancora forti barriere che separano le diverse discipline.

Le teorie fisiche, e ancora di più quelle matematiche, premiano il rigore e la precisione, rimanendo immutabili anche per secoli. Molte delle conoscenze in campo biologico, invece, sono molto recenti e soggette ad una rapida evoluzione. D’altra parte, i fisici sono abituati a grandi semplificazioni, mentre i biologi non le amano, forse perché in più diretto contatto con la complessità e variabilità implicita nei sistemi biologici. Per i fisici, inoltre, è naturale presupporre come necessità per l’avanzamento della scienza, una sorta d’equilibrio tra teoria fondamentale ed esperimento, mentre molti biologi non hanno una particolare formazione in campo fisico-matematico, anche se tale fattore non ha rallentato gli spettacolari avanzamenti ottenuti in campo biologico negli ultimi tempi.

Si può menzionare, infine, la barriera del linguaggio che non agevola un più proficuo interscambio di idee tra i due campi: per i fisici e i matematici ciò riguarda soprattutto la descrizione a livello fenomenologico dei problemi biologici, mentre per i biologi si concentra nella difficoltà di esprimere con adeguati strumenti quantitativi gli importanti risultati conseguiti nel loro settore.

Come se ciò non bastasse, ai ricercatori che cercano di superare questi ostacoli può anche succedere di ritrovarsi con delle difficoltà di tipo istituzionale o di essere guardati con sospetto perfino dai propri colleghi. Poco tempo fa, in un libro di frasi, racconti e aneddoti relativi al mondo

della scienza, ho trovato la seguente definizione dei biofisici che mi sembra descrivere abbastanza bene la situazione:

“i biofisici sono ricercatori che ai fisici parlano di biologia, ai biologi parlano di fisica e fra loro parlano di ... donne!”

Poiché mi sento un biofisico (in senso lato), vorrei raccontare attraverso lo sviluppo di un modello della percezione uditiva, il percorso scientifico che mi ha portato lungo la difficile strada che collega la Fisica alla Biologia. Questa esperienza personale dovrebbe, nelle mie intenzioni, servire da incoraggiamento sia ai biologi, per esplorare le enormi possibilità che le nuove tecniche di modellizzazione non lineare offrono nel loro campo, sia ai fisici, per avvicinarli all'infinitamente complesso e meraviglioso mondo del vivente con il rispetto, l'umiltà e la dedizione che questo sforzo richiede.

Gli inizi

Nell'anno 1987 stavo completando la mia tesi per il dottorato di ricerca in Fisica Teorica presso l'Università Nazionale di La Plata, in Argentina. Il tema della tesi ⁽²⁾ era “Sincronizzazione e caos in oscillatori non lineari” e riguardava, appunto, lo studio del comportamento di alcuni modelli semplici di oscillatori non lineari che hanno la potenzialità di produrre risposte molto complicate dal punto di vista dinamico, note come *caos deterministico*.

Avevo cominciato a studiare questo tipo di problemi nel 1981, in un sistema di equazioni differenziali con soluzione analitica esatta. Forzando questo sistema con una forza periodica si ottenevano diversi comportamenti dinamici interessanti, come la transizione al caos via duplicazione di periodo, o *via di Feigenbaum*, e diversi tipi di risonanze subarmoniche. Nel 1983, insieme al mio collega dell'Università di La Plata, Oreste Piro, eravamo riusciti a pubblicare sul *Physical Review Letters* ⁽³⁾ un articolo dove, sfruttando le proprietà del modello, si riportava il valore della costante δ di Feigenbaum calcolato con una precisione mai ottenuta in un sistema di dinamica del continuo ($\delta = 4.669195$), e si mostravano anche certe proprietà gerarchiche delle soluzioni subarmoniche che si potevano spiegare in base a certi risultati della teoria dei numeri razionali. In modo naturale emergeva il ruolo delle cosiddette *sequenze di Farey* e di un numero in particolare che determinava molte delle proprietà di scala del regime di

sincronizzazione, *la sezione aurea* o *numero d'oro* (per maggiori dettagli si veda l'articolo sul numero precedente di *Systema Naturae* ⁽⁴⁾).

Allo stesso tempo, erano usciti alcuni lavori che cercavano di spiegare, mediante oscillatori simili a quello studiato da noi, alcuni aspetti della dinamica cardiaca, come ad esempio quello della fibrillazione ventricolare, con risvolti nel settore medico. Fu così che ricevemmo una lettera del fisiologo canadese Leon Glass, pioniere in questo tipo di studi ⁽⁵⁾ e continuatore dei lavori di Winfree ⁽⁶⁾, dove suggeriva che il nostro oscillatore poteva consentire lo studio analitico di alcune ricorrenze discrete, note come *mappe della fase*, mediante la determinazione della cosiddetta *funzione di trasferimento di fase*.

Con questo metodo si poteva capire il comportamento di un oscillatore forzato per i casi significativi in cardiologia. E così nacque il mio interesse per i problemi biologici. Altri lavori furono pubblicati, in particolare la determinazione analitica della funzione di trasferimento di fase per il modello con soluzione esatta ⁽⁷⁾, e alcune memorie sull'applicazione dei nostri risultati alla dinamica delle reazioni chimiche e alla dinamica cardiaca furono presentate in diverse Riunioni dell'Associazione Fisica Argentina ⁽⁸⁾. Queste ultime, destarono l'attenzione d'un gruppo multidisciplinare dell'Università del Tucuman dedicato allo studio della dinamica cardiaca, e così nacque un lavoro ⁽⁹⁾ dove si mostra per la prima volta il comportamento di duplicazione di periodo in cuore di rospo stimolato periodicamente e dove si applicano delle allora recentissime tecniche della dinamica non lineare allo studio di un problema biologico, come ad esempio, la ricostruzione dello spazio delle fasi o la determinazione delle dimensioni di correlazione.

Dopo questi primi lavori, si andò delineando sempre più chiaramente per me un'idea di come la teoria e le tecniche della dinamica non lineare si potessero applicare ai problemi biologici, e decisi di includere un commento su questo argomento nella mia tesi. Lo chiamai *modellizzazione qualitativa*, prendendo lo spunto dai lavori di Poincaré, riguardanti lo studio qualitativo delle equazioni differenziali ordinarie ⁽¹⁰⁾. In seguito, ho cercato di applicare e far conoscere questa mia idea, nella convinzione che potesse indicare una delle strade da percorrere ^(2,4,8,11). Al tempo di quella prima proposta, i risultati erano incompleti e sembrava difficile poter definire una metodologia adeguata. Quasi nello stesso periodo però, affrontai un problema che continuo ancora oggi a studiare e che mi ha confermato pienamente la validità dell'approccio qualitativo: si tratta

dell'elaborazione neurale dell'informazione sensoriale, con particolare riguardo a quella uditiva. Infatti, oltre a nutrire una grande passione per la fisica, ho avuto anche la possibilità di acquisire una discreta formazione in campo musicale. Una caratteristica della percezione musicale mi aveva particolarmente incuriosito: perché alcuni intervalli musicali, noti come *intervalli consonanti* o *armonici*, sono particolarmente gradevoli all'udito, mentre altri lo sono in minor grado o addirittura sono sgradevoli?. Un intervallo armonico viene definito da due note musicali che si suonano simultaneamente. Si presuppone che l'altezza di ogni nota venga data dalla frequenza della sua componente fondamentale (sviluppo in serie di Fourier) e, pertanto, l'intervallo si può caratterizzare dal quoziente tra le frequenze fondamentali di ambedue le note. Un giorno, mentre stavo consultando una tabella che riportava come quoziente di frequenze gli intervalli armonici correntemente accettati dalla musica occidentale, osservai una curiosa correlazione: cinque degli otto intervalli riportati nella Tabella 1, coincidevano con i cinque primi convergenti della sezione aurea (il significato dei convergenti della sezione aurea sarà chiarito più avanti).

Tabella 1

Unisono	Invariabile	1/1
Ottava	Invariabile	1/2
Quinta	Invariabile	2/3
Quarta	Mista	3/4
Sesta Maggiore	Variabile	3/5
Sesta Minore	Variabile	5/8
Terza Maggiore	Variabile	4/5
Terza Minore	Variabile	5/6

Motivato dai lavori sull'oscillatore con soluzione esatta, che mi avevano consentito di capire il ruolo che giocava la sezione aurea nella sua dinamica, mi venne un'idea: non era forse possibile che, allo stesso modo che la sezione aurea consente di determinare la gerarchia delle regioni di sincronizzazione in un oscillatore forzato, questa potesse servire anche per determinare la gerarchia degli intervalli musicali armonici? In fin dei conti, il nostro sistema uditivo non è altro che un sistema dinamico non lineare, sia pure estremamente complesso. Lo studio di questo problema mi ha consentito di sviluppare gli strumenti metodologici della *modellizzazione*

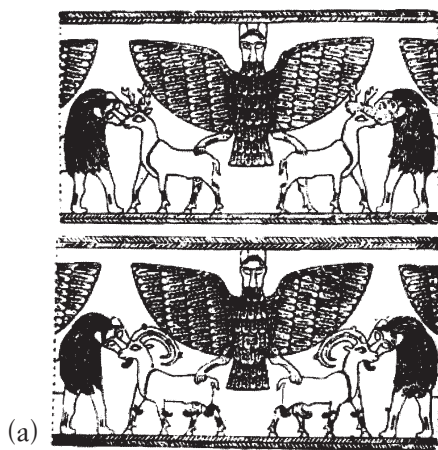
qualitativa, che consentono un approccio matematico alla modellizzazione dei sistemi complessi e che, pertanto, possono essere applicati con successo a diversi sistemi di natura biologica.

Gli intervalli armonici e la sezione aurea

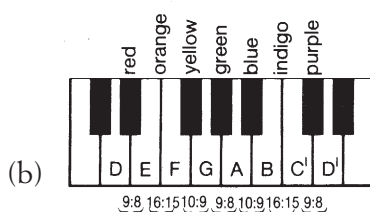
Lo sviluppo della semplice idea proposta nella sezione precedente richiede il chiarimento di diversi aspetti del problema che sembrano contraddire l'ipotesi. Il primo è di natura musicale e comporta la spiegazione dei risultati delle esperienze di tipo psico-acustico per la valutazione della gradevolezza di un dato intervallo. Come abbiamo prima detto, solo alcuni degli intervalli riportati nella tabella 1 corrispondono a convergenti della sezione aurea e pertanto, questa corrispondenza tra convergenti ed intervalli potrebbe essere una semplice coincidenza. D'altra parte, se il fenomeno della percezione uditiva fosse legato in modo causale alla sezione aurea, ci si potrebbe aspettare che tale numero fosse presente in qualche modo anche nell'estetica di altri sensi. Infatti, una prima argomentazione a favore del ruolo attivo della sezione aurea proviene dal sistema visivo: dagli esempi di arte antica e rinascimentale agli esperimenti di Fletcher (il padre della psico-fisica), i quali mettono in evidenza che il rettangolo con le proporzioni più gradevoli viene definito dal rapporto aureo, l'evidenza supporta un ruolo rilevante di tale proporzione nell'estetica visiva⁽¹²⁾. Altre referenze riportano evidenze in tal senso anche nell'estetica musicale⁽¹³⁾, ma queste sono in genere frammentarie e non conclusive. Per portare avanti la mia ipotesi, bisognava pertanto dimostrare che la sezione aurea determina anche quelli intervalli armonici riportati nella tabella 1 che non coincidono con alcuno dei suoi convergenti. Questo fu il primo problema che affrontai e nella mia tesi si dimostra come, grazie ad una costruzione matematica astratta che utilizza le proprietà numeriche della sezione aurea, possono essere generati tutti gli intervalli armonici. Non voglio dilungarmi oltre su questi risultati che sarebbero più pertinenti in un contesto musicale, rimandando il lettore alla ref. per una descrizione dettagliata di questo approccio che conduce, tra l'altro, alla generazione di scale musicali con diversi numeri di note (si veda nella fig. 4 l'esempio della scala aurea di 12 note).

Vale la pena invece sottolineare che la procedura si sostenta solo sulle proprietà numeriche della sezione aurea e di un'ipotesi di simmetria

(palindromia). Questa ipotesi si protrae alle origini della musica (si veda la Figura 1a e la corrispondente didascalìa) ed è stata ripresa, tra altri, dallo stesso Newton. Infatti, come si può apprezzare nella Figura 2, Newton propose una scala musicale giusta con tale proprietà di palindromia, proprietà che stese alla scomposizione della luce nei colori primari (Fig. 1b) mantenendo l'analogia con gli intervalli musicali.



(a)



(b)

Fig.1a - La proprietà di simmetria speculare nell'arte visiva babilonica. Questa simmetria speculare, se applicata ai numeri, si chiama proprietà di palindromia. Gli antichi babilonesi avevano già costruito una scala musicale palindromica con frazioni di denominatore uguale a 60. Ogni frazione, oltre che rappresentare una nota musicale, raffigurava una deità del Panteon.

Fig.1b - Rappresentazione dei colori in corrispondenza con una scala musicale palindromica (per l'originale di Isaac Newton si veda Fig. 3).

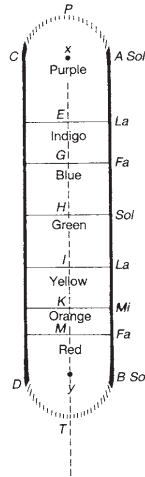


Fig.3 - Rappresentazione dei colori in corrispondenza di una scala musicale (Isaac Newton)

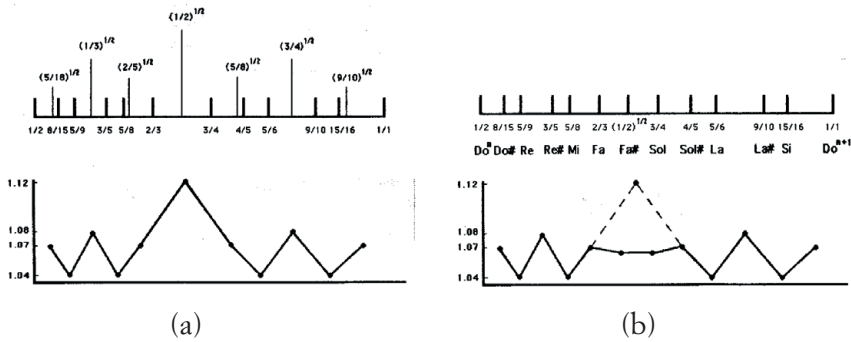


Fig.4 - Scala aurea di 12 note. In (a) si può apprezzare la proprietà di palindromia della scala. Nella parte superiore, i tratti verticali corti corrispondono alle note della scala e quelli più lunghi ai successivi assi di simmetria con quello principale in $1/\sqrt{2}$. Nella parte inferiore sono rappresentati gli intervalli tra successive note. La simmetria palindromica si rompe se si utilizza un'approssimazione razionale all'asse principale di simmetria. Per questo motivo è necessario includere una nota irrazionale in corrispondenza con l'asse principale. Il risultato è schematizzato nella parte (b) della figura. Risulta notevole il fatto che questa scala si discosta molto poco della scala di temperamento equo attualmente in uso e che tutti gli intervalli armonici sono generati mediante questa procedura.

A questo punto della discussione conviene chiarire il significato di alcuni concetti della teoria di numeri razionali, cosa che sarà utile anche in seguito per affrontare l'argomento dal punto di vista dei sistemi dinamici.

Sviluppo in frazioni continue

Gli antichi greci, credevano che due qualsiasi segmenti dati, a e b , fossero commensurabili, cioè che esistesse una unità di misura, c , nella quale i due segmenti si esprimevano come interi:

$$\begin{aligned} a &= n \cdot c \\ b &= m \cdot c \end{aligned} \tag{1}$$

con n, m , interi. Per dimostrare ciò, avevano inventato una procedura geometrica che viene illustrata nella figura 4.1. Si prende il segmento più piccolo, b , e si dispone lungo il segmento più grande, a , tante volte come sia possibile senza eccedere la lunghezza di a (Fig. 4.2). Fatto questo rimarrà un resto r_1 . A questo punto si dispone questo resto lungo il segmento più piccolo, b , in modo analogo a quanto fatto prima ottenendo un nuovo resto r_2 (Fig. 4.3). Questo processo si continua in modo iterativo fino a quando si trova un resto nullo, cioè, $r_n = 0$. A questo punto si può tornare indietro e trovare che i due segmenti originari si possono esprimere come multipli interi del resto anteriore, r_{n-1} .

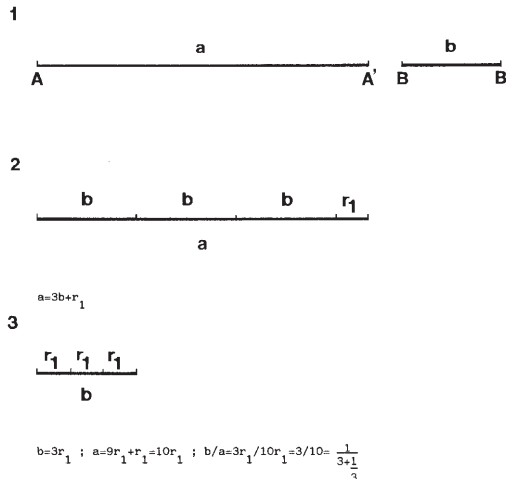


Fig.4.1-2-3 - Metodo geometrico utilizzato dagli antichi greci per determinare l'unità di misura comune di due segmenti arbitrari.

Per l'esempio illustrato nella figura 4, abbiamo,

$$\begin{aligned} a &= 3b + r_1 \\ b &= 3r_1 \\ r_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

pertanto r_1 è l'unità di misura comune ad ambi segmenti, infatti,

$$\begin{aligned} b &= 3r_1 \\ a &= 3b + r_1 = 9r_1 + r_1 = 10r_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Due osservazioni si possono fare: la prima è che se i segmenti sono commensurabili, il loro rapporto è un numero razionale

$$b/a = 3r_1/10r_1 = 3/10 \quad (4)$$

La seconda è che questo numero si può ottenere nel seguente modo:

$$3/10 = 1/(3+1/3) \quad (5)$$

dove il primo 3 del secondo termine è il numero di volte che b sta in a , ed il secondo 3, il numero di volte che r_1 sta in b . Questa procedura è completamente generale e l'espressione (5) viene chiamata *sviluppo in frazioni continue*. La notazione normalmente utilizzata per questo sviluppo è,

$$(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, \dots) = C_0 + \frac{1}{C_1 + \frac{1}{C_2 + \frac{1}{C_3 + \frac{1}{C_4 + \dots}}}} \quad (6)$$

dove il coefficiente C_0 rappresenta la parte intera del quoziente e i coefficienti C_i successivi denominatori dello sviluppo. Se lo sviluppo si tronca ad un certo coefficiente, C_m , si ottiene il cosiddetto convergente o approssimante di ordine m . I convergenti ci forniscono le migliori approssimazioni di un

numero arbitrario mediante una sequenza convergente di razionali (nella sezione 6 si spiega il perché). Nel nostro esempio, lo sviluppo in frazioni continue si scrive,

$$3/10 = (0, 3, 3) \quad (7)$$

e i successivi convergenti sono,

$$\begin{aligned} (0) &= 0 \\ (0, 3) &= 1/3 \\ (0, 3, 3) &= 3/10 \end{aligned} \quad (8)$$

Un caso molto interessante, la cui scoperta si attribuisce alla scuola pitagorica, è quello rappresentato nella figura 5. Se si vuole comparare con il metodo geometrico prima descritto il lato del pentagono, $b=AC=AE'$, con la diagonale $a=AB$, si può osservare che a sta una volta in b dando un resto $r_1=E'B=A'B$.

Il resto r_1 sta una volta in $b=BD'$ lasciando un resto r_2 che non è altro che il lato del pentagono più piccolo, $A'B'C'D'E'$. Poiché r_1 è la diagonale di questo pentagono, il confronto tra r_2 e r_1 ci riporta di nuovo al confronto del lato con la diagonale di un pentagono più piccolo di quello originale, potendo ripetersi la procedura all'infinito.

Per considerazioni di similitudine, risulta chiaro che ogni resto, r_{n+1} , sta nel precedente, r_n , una sola volta. Come conseguenza di ciò, lo sviluppo in frazioni continue di questo rapporto non finisce mai. Consiste di una serie infinita di 1,

$$(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) \quad (9)$$

il che contraddice l'affermazione di partenza, cioè che dati due segmenti qualsiasi esiste una misura comune mediante la quale entrambi si esprimono come numeri interi. Infatti, la semplice costruzione geometrica della figura 2 comporta la scoperta dell'esistenza di numeri non razionali, vale a dire degli *irrazionali*.

Sapendo che lo sviluppo in frazioni continue del rapporto tra il lato e la diagonale di un pentagono è una serie infinita di 1, possiamo calcolare i convergenti di qualsiasi ordine,

$$\begin{aligned}
 (0) &= 0 \\
 (0, 1) &= 1 \\
 (0, 1, 1) &= 1/2 \\
 (0, 1, 1, 1) &= 2/3 \\
 (0, 1, 1, 1, 1) &= 3/5 \\
 (0, 1, 1, 1, 1, 1) &= 5/8 \\
 (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) &= 8/13
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

la prima cosa che possiamo osservare, è che tanto nel numeratore quanto nel denominatore si trovano sempre gli stessi interi,

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \tag{11}$$

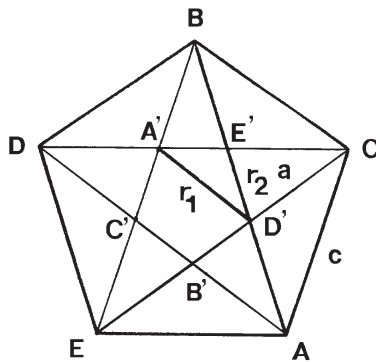


Fig. 5 - Applicazione del metodo grafico illustrato nella figura 4 al confronto tra il lato e la diagonale di un pentagono regolare.

e che uno qualsiasi di questi numeri si può ottenere semplicemente come la somma dei due precedenti,

$$\begin{aligned}
 2 &= 1+1 \\
 3 &= 2+1 \\
 5 &= 3+2 \\
 8 &= 5+3 \\
 13 &= 8+5
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

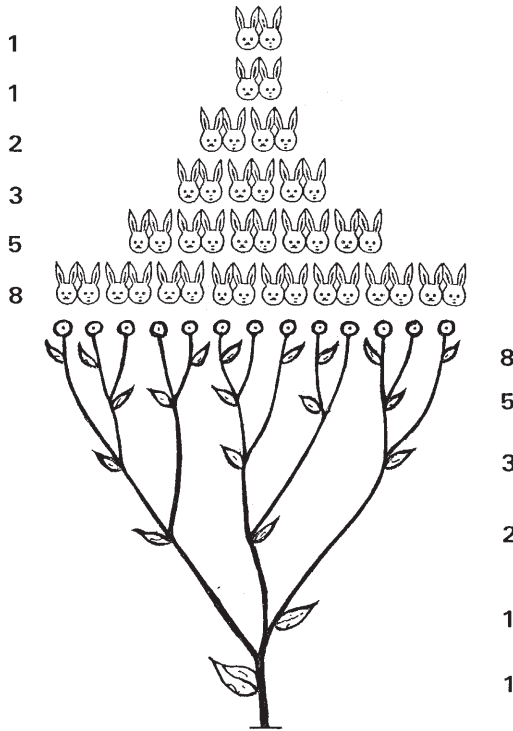


Fig.6 - Progressione del numero di conigli nel modello originale di Fibonacci e in un esempio di fillofassi.

Questi numeri si conoscono come numeri di Fibonacci, nome coniato nell'800 dal matematico francese Edouard Lucas in onore del matematico pisano che li scoprì. Infatti, Leonardo di Pisa, noto anche come Fibonacci (Filius Bonacci), realizzò di fatto nel 1202 il primo modello di dinamica delle popolazioni di cui si abbia conoscenza. Leonardo si pose il problema di come descrivere l'evoluzione del numero di individui in una popolazione di conigli partendo da alcune considerazioni (alquanto arbitrarie) sulle loro caratteristiche riproduttive. Infatti, partendo da una coppia di conigli col presupposto che questa abbia bisogno di due mesi per essere matura sessualmente (e pertanto riprodursi) e che, una volta trascorso questo tempo, generi una nuova coppia di conigli ogni mese, si ottiene una progressione temporale del numero delle coppie di conigli pari ai numeri di Fibonacci (si veda Fig. 6). Dai tempi di Fibonacci ad

oggi, sono state descritte un'infinità di proprietà legate a questi numeri e alle loro applicazioni a diversi sistemi reali. Molti esempi avvengono in campo biologico, come ad esempio, nel caso della fillotassi (Fig. 6). Una rivista matematica è dedicata interamente alle proprietà dei numeri di Fibonacci ⁽¹⁴⁾.

Tornando allo sviluppo in frazioni continue, dato che (9) non descrive un razionale poiché non finisce mai, quale numero descrive?. Scrivendo esplicitamente lo sviluppo (9) per questo numero che denoteremo ϕ , si ottiene,

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (13)$$

Poiché lo sviluppo in frazioni continue è infinito, si può scrivere,

$$\phi = 1/(1+\phi) \quad (14)$$

il che implica che ϕ soddisfa la seguente equazione algebrica di secondo ordine,

$$\phi^2 + \phi - 1 = 0 \quad (15)$$

e la soluzione di questa equazione di secondo ordine è,

$$\phi_{1-2} = (1 \pm \sqrt{5}) / 2 \quad (16)$$

che non è altro, come il lettore avrà già immaginato, che la sezione aurea. LA SEZIONE, in maiuscola, come la scrivevano i greci. La sezione aurea è il più irrazionale degli irrazionali, cioè quello più difficile da approssimare mediante una sequenza convergente di razionali.

Un'altra proprietà che possiamo osservare in (10), è che due successivi convergenti della sezione aurea soddisfano la relazione

$$(p \cdot s - r \cdot q) = 1 \quad (17)$$

Ad esempio, se prendiamo $5/8$ e $8/13$, si ottiene $(5 \cdot 13 - 8 \cdot 8) = 65 - 64 = 1$.

Questa proprietà è molto generale e vale per due successivi convergenti di qualsiasi numero. I razionali che soddisfano la relazione anteriore si chiamano “adiacenti di Farey”. Tra due adiacenti di Farey si può definire una operazione nota come somma di Farey,

$$p/q \oplus r/s = (p+q)/(r+s) \quad (18)$$

il numero risultante si conosce come *mediante* ed è quello di minor denominatore che si trova nell'intervallo $(p/q, r/s)$. Grazie a questa proprietà, il *mediante* risulta utile per descrivere l'ordine gerarchico delle risposte di sincronizzazione in un oscillatore periodicamente forzato: *la risposta caratterizzata dal mediante, $(p+q)/(r+s)$, possiede la regione di stabilità più importante tra tutte quelle che si trovano nell'intervallo definito dai numeri p/q e r/s .*

Prendendo come esempio un oscillatore nonlineare forzato periodicamente⁽⁴⁾, se si rappresentano gli intervalli di stabilità di diverse risonanze subarmoniche in funzione della frequenza propria dell'oscillatore, si ottiene un grafico come quello della figura 7, dove si può apprezzare l'organizzazione gerarchica data dall'operazione di *mediante* di Farey. Nell'ingrandimento della stessa figura, possiamo osservare come questo ordine locale si mantiene a diverse scale. Infatti, la regione ingrandita risulta compresa tra i valori $p/q=1/5=0,20$ e $r/s=1/4=0,25$.

L'operazione di *mediante* (eq. 18) ci fornisce il valore $2/9=0,222$ che,

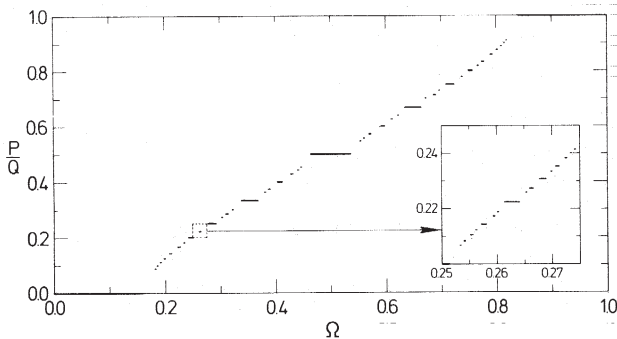


Fig.7 - Scala del diavolo in un auto-oscillatore forzato periodicamente. Ogni tratto orizzontale rappresenta l'intervallo di stabilità di una data risonanza subarmonica al variare del parametro Ω .

come si può apprezzare nel riquadro della figura, corrisponde alla risonanza più importante (trattino più largo) all'interno di detto intervallo. E' da sottolineare che questo comportamento qualitativo è universale per oscillatori periodicamente forzati (non dipendendo dai dettagli dell'oscillatore) e può estendersi a sistemi non auto-oscillanti (come ad esempio quelli eccitabili, che si possono trovare nella dinamica neurale e nella sua descrizione matematica mediante le equazioni di Hodgkin-Huxley).

Il problema dal punto di vista della teoria dei sistemi dinamici

Con l'ausilio della figura 8 possiamo fare un riassunto di quanto detto finora: sappiamo che se il nostro sistema uditivo viene stimolato simultaneamente con due note musicali, può rispondere con una sensazione di maggiore o minore gradevolezza (consonanza) la quale, a sua volta, dipende grosso modo dal rapporto tra le frequenze fondamentali dei due suoni. Abbiamo menzionato anche che quei rapporti che evocano una sensazione di maggior consonanza possono essere derivati da un solo numero irrazionale: la sezione aurea. Sulla destra della figura viene rappresentata la sensazione di dissonanza (in una scala arbitraria) in funzione del rapporto di frequenze dello stimolo. Si può apprezzare come in corrispondenza con rapporti definiti da numeri interi e piccoli si ha un minimo di dissonanza (massimi di consonanza).

Come si possono ordinare adesso tutte queste informazioni nel quadro della dinamica non lineare? L'idea di base è che la risposta percettiva allo stimolo rappresentato da un intervallo armonico si possa mettere in corrispondenza con alcune proprietà delle risposte di un sistema dinamico sottomesso allo stesso tipo di stimolo. Bisogna sottolineare che non si cerca di fare una diretta corrispondenza con alcuni dei parametri fisici dello stimolo (come nei metodi tradizionali di descrizione del fenomeno percettivo) ma bensì con i parametri della risposta che tali stimoli inducono in un sistema che sia sufficientemente universale da rappresentare il fenomeno sotto studio. Questa è la base della teoria qualitativa.

Per mettere in atto queste idee nel caso degli intervalli armonici, bisogna ricordare che la sezione aurea determina delle proprietà di gerarchizzazione delle risposte in un oscillatore periodicamente forzato, cioè forzato con un'unica frequenza (Fig.9). Sulla destra della figura sono state rappresentate le regioni di esistenza (regioni nelle quali sono stabili) diverse risposte subarmoniche di un oscillatore non lineare periodicamente forzato ⁽⁴⁾.

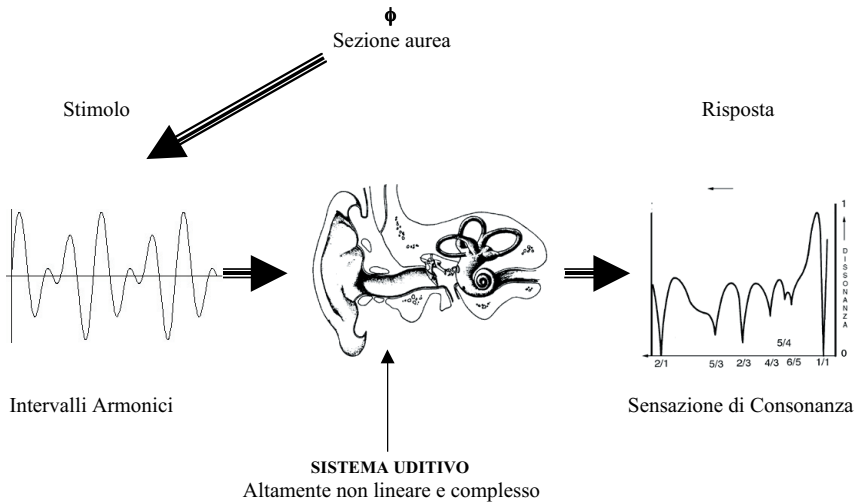


Fig.8: *i rapporti di frequenza che descrivono tutti gli intervalli armonici attualmente in uso nella musica occidentale si possono derivare dalle proprietà di un solo numero, ϕ , la sezione aurea. Nella parte sinistra della figura si rappresenta uno stimolo sonoro corrispondente a un intervallo di quinta (il rapporto tra le frequenze fondamentali è di 2/3). Sulla destra vediamo rappresentato il grado di consonanza di diversi intervalli secondo Pierce (Pierce, J.R. "La scienza del suono", Zanichelli, [1988]). Si osserva come vengono privilegiati gli intervalli armonici che vengono descritti da rapporti di frequenza razionali definiti da interi piccoli (teoria di Hemboltz della consonanza). L'idea di base sviluppata in questo articolo è che la sensazione di consonanza ha una origine dinamica. In altri termini, si può dire che la consonanza non è un processo tipo software che opera a livello della corteccia cerebrale, ma piuttosto conseguenza delle risposte dinamiche del sistema uditivo, risposte che si producono in tempo reale e che sono di tipo universale, cioè comuni a intere classi di sistemi non lineari.*

L'analogia con il grafico di dissonanza della figura 8 è molto forte. Le regioni di stabilità toccano l'asse orizzontale in corrispondenza con rapporti di frequenza (tra quella esterna e quella propria dell'oscillatore) definiti da numeri interi. In analogia con la teoria di Hemboltz della consonanza, quanto più piccoli sono questi interi maggiore è la regione di stabilità che a partire da loro origina.

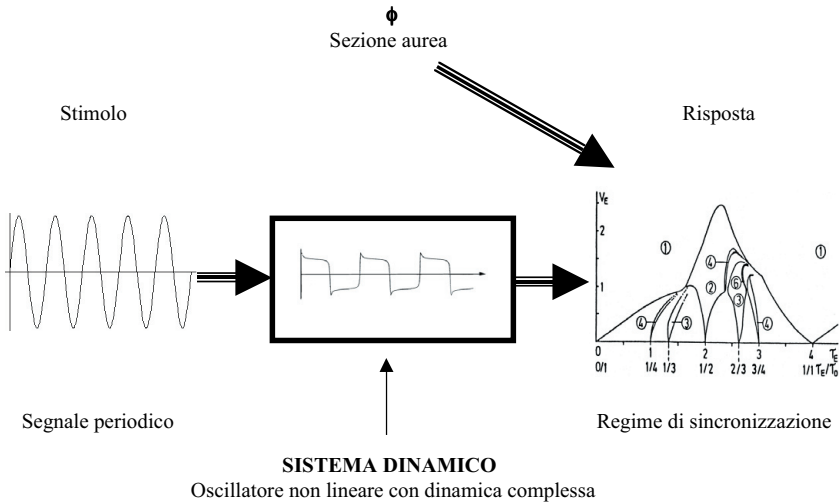


Fig. 9: Schema riassuntivo del regime di sincronizzazione in un oscillatore non lineare periodicamente stimolato. Le risposte di sincronizzazione sono organizzate gerarchicamente mediante l'operazione di mediante di Farey. Sulla destra della figura si possono osservare le regioni nello spazio dei parametri (ampiezza dello stimolo periodico e quoziente tra la frequenza esterna e quella intrinseca) dove le soluzioni subarmoniche sono stabili. Il grafico della figura 7 corrisponde a una sezione ad ampiezza costante di quello anteriore. In analogia con la sensazione di consonanza le regioni di stabilità nascono su valori razionali nell'asse delle ascisse, essendo più larghe le regioni che si originano in razionali più semplici. Inoltre, la sezione aurea determina molte delle proprietà di scala del regime di sincronizzazione, in particolare, la velocità di decremento della larghezza delle soluzioni subarmoniche nelle vicinanze di un irrazionale (transizione quasiperiodicità-caos).

Si può pensare allora che gli intervalli di stabilità delle risposte di un oscillatore nonlineare periodicamente forzato costituiscano i descrittori fisici appropriati della sensazione di consonanza.

Nonostante queste proprietà delle risposte sincronizzate siano analoghe alle risposte percettive, si presenta a questo punto un problema essenziale: un intervallo armonico contiene almeno due frequenze e l'estensione del concetto di sincronizzazione a due o più frequenze presenta delle difficoltà

di natura fondamentale:

qualsiasi sistema dinamico forzato da due o più frequenze mutualmente incommensurabili, non può produrre delle risposte periodiche.

In tal modo, le risposte periodiche di sincronizzazione, che hanno intervalli non nulli di stabilità nello spazio dei parametri per il caso di forzato periodico (i segmenti orizzontali visibili nella Fig. 7), diventano immediatamente instabili in questo spazio (questi segmenti diventano punti) quando anche un'unica frequenza incommensurabile (il quoziente tra le due frequenze non può esprimersi mediante un razionale) è addizionata alla forza esterna (stimolo). Sappiamo invece che questo non avviene nel fenomeno percettivo: la sensazione di consonanza rimane di fronte a delle perturbazioni che rappresentano stonature dell'intervallo armonico. Questo significa che un intervallo di quinta rimane consonante anche se le frequenze fondamentali delle due note che lo compongono si stonano leggermente dal rapporto $2/3$, passando lo stimolo (dal punto di vista matematico) da periodico a quasiperiodico o incommensurabile.

A questo punto, la teoria dei sistemi dinamici ci può fornire una serie di argomenti per identificare quale tipo di risposte dinamiche potrebbero giocare un ruolo analogo a quello delle risposte periodiche nel fenomeno della sincronizzazione per il caso che ci interessa, cioè quando la stimolazione esterna al sistema non è di tipo periodico, bensì quasiperiodica o incommensurabile.

Come abbiamo prima accennato, le risposte periodiche sono instabili in questo caso. Dobbiamo, di conseguenza, cercare risposte più complesse. Per capire quali sono le risposte analoghe a quelle periodiche, conviene interpretare queste ultime come risonanze a due frequenze. Se f_1 denota la frequenza della forza esterna e f_i quella propria dell'oscillatore, quando f_1/f_i si può approssimare mediante un razionale, si ha:

$$f_1/f_i \sim p/q \quad (19)$$

la sincronizzazione consiste nell'accomodazione della frequenza f_i ad un valore tale che la relazione (19) diventa esatta, di conseguenza:

$$f_i = p \cdot f_1 / q \quad (20)$$

quando p vale 1, la risposta è esattamente un subarmonico di f_1 , cioè f_1/q . Per questo motivo le risposte sincronizzate o di phase-locking vengono chiamate anche risonanze subarmoniche.

Le risonanze sono molto importanti nella teoria dei sistemi dinamici e danno luogo anche a problemi nell'applicazione dei metodi perturbativi perché determinano denominatori che si annullano. Infatti, una risonanza è associata all'esistenza di una soluzione non triviale in numeri interi, p_i , della seguente equazione,

$$\sum_i (p_i f_i) = 0 \quad (21)$$

Per le risonanze a due frequenze, possiamo scrivere l'equazione (20) come

$$f_i \cdot q - f_1 \cdot p = 0 \quad (22)$$

che è della forma (21).

La generalizzazione a tre frequenze è immediata. Una risonanza di tre frequenze è caratterizzata da una soluzione non triviale in numeri interi della seguente equazione,

$$f_i \cdot p_0 + f_1 \cdot p_1 + f_2 \cdot p_2 = 0 \quad (23)$$

dove i coefficienti interi, p_i , possono essere positivi o negativi.

Se non esiste una soluzione all'equazione anteriore, si dice che le tre frequenze sono incommensurabili. Un'analisi della stabilità delle soluzioni ci consente però di escludere quest'ultima possibilità per i casi che ci interessano.

Un noto teorema nella teoria di sistemi dinamici, il teorema di Ruelle-Takens-Newhouse, dimostra che perturbazioni infinitesimali del sistema destabilizzano le soluzioni quasiperiodiche a tre o più frequenze, dando luogo a comportamenti di tipo caotico. Pertanto, se escludiamo queste ultime, le uniche risposte dinamiche che possono giocare il ruolo svolto dalle risonanze a due frequenze in sistemi forzati periodicamente, nel caso più complesso di forzato quasiperiodico, sono le risonanze a tre frequenze.

Caccia alle risonanze di tre frequenze.

La fisica ama la semplicità, non perché ignori o disprezzi la complessità del mondo reale, ma piuttosto perché ha imparato, faticosamente e a proprie spese, che l'unico modo per comprendere i problemi complessi è quello di capire prima quelli più semplici.

Così comincio per me la caccia alle risonanze di tre frequenze, nella convinzione che questa generalizzazione del fenomeno di sincronizzazione era la chiave di lettura per la percezione uditiva dei toni complessi. Nonostante l'apparente semplicità dell'approccio, dedicai molto tempo a questa ricerca senza trovare una risposta adeguata. Come molte volte accade, fu un fatto relativamente fortuito (se esistono i fatti fortuiti), che mi mise nella strada giusta verso la soluzione: stavo leggendo il bellissimo libro di Manfred Schroeder, *Number Theory in Science and Communication* ⁽¹⁵⁾ (il quale ha avuto il grande merito di avvicinare la teoria dei numeri ai problemi della fisica e dell'ingegneria) ove trovai descritto per la prima volta un fenomeno percettivo molto interessante: la cosiddetta percezione del "residuo". E' molto complessa la storia del residuo ⁽¹⁶⁾, ma in due parole possiamo dire che nasce circa a metà dell'Ottocento con una disputa scientifica tra Ohm e Seebeck. Ohm, sulla base degli allora recenti risultati di Fourier sulla decomposizione di una funzione periodica in una serie di funzioni armoniche, aveva proposto la prima teoria sulla percezione dell'altezza del suono. La legge acustica di Ohm, molto meno nota che quella, sempre sua, che relaziona tensione e corrente in un circuito elettrico, dice in poche parole che la sensazione di altezza di un suono corrisponde ad una delle frequenze di Fourier nelle quali questo suono si può decomporre. Ma presto Seebeck dimostrò che esistono particolari suoni che producono delle sensazioni d'altezza che non corrispondono a nessuna delle loro componenti di Fourier. Seebeck riuscì a produrre un suono composto da una serie di parziali in relazione armonica ma privo della fondamentale. L'altezza del suono corrispondeva con la frequenza della fondamentale, nonostante la sua assenza. Per tale motivo questo fenomeno è conosciuto come il problema della *fondamentale mancante*. La prima teoria su questo fenomeno è dovuta a Hemholtz ⁽¹⁷⁾ e si basa sull'idea che le frequenze mancanti possono essere generate nelle non linearità statiche dell'udito (queste frequenze addizionali si conoscono in acustica come toni di combinazione o prodotti di distorsione). Il fenomeno della fondamentale

mancante si conosce oggi soprattutto come la percezione del residuo grazie ai lavori di Schouten, il quale negli anni 40 dimostrò che la spiegazione di Hemholtz era in contraddizione con i fatti sperimentali. Infatti, nel suo noto esperimento di *pitch shift*, Schouten modificò i valori di frequenza delle componenti di Fourier in modo tale che il tono di combinazione differenza rimanesse invariato. Ciò nonostante, la percezione dell'altezza slittava con le componenti dello stimolo, dimostrando l'impossibilità di descriverla mediante i toni di combinazione come si proponeva nella teoria di Hemholtz. Più strano ancora, e questo è il fatto che richiamò l'attenzione di Schroeder, è che il nostro cervello sembra dare una risposta analoga al calcolo di una sorta di massimo comune divisore tra le frequenze di tutte le componenti di Fourier dello stimolo.

Vediamo l'esempio di Schroeder: se si presenta all'udito un accordo di due note le cui frequenze fondamentali sono 320 e 560 Hertz (cicli al secondo), l'altezza soggettiva percepita corrisponde al massimo comune divisore (MCD) di queste due frequenze, cioè 80 Hertz, e non al tono di combinazione differenza di 240 Hertz. Se adesso le due frequenze sono aumentate di 5 Hertz, prendendo i valori di 325 e 565 Hertz, rispettivamente, il MCD scende a 5 Hertz (ed anche a 0 Hertz, se le due frequenze si fanno diventare incommensurabili con una piccola variazione di frequenza addizionale). Ma questo non è quello che si percepisce: sembra che il sistema uditivo cerchi una migliore approssimazione al MCD delle due frequenze come, ad esempio, 81 Hertz, che sarebbe esatto se le frequenze fossero 324 e 567 Hertz, rispettivamente.

Questo semplice esperimento psicoacustico si conosce come la percezione del residuo e dimostra che, contrariamente a quello ch'era stato proposto nelle prime teorie non lineari della percezione ⁽¹⁸⁾, l'altezza di un tono complesso non viene necessariamente descritta né dalle componenti di Fourier dello stimolo né dai toni di combinazione. Nel suo libro, Schroeder sostiene che la percezione del residuo è dovuta a una elaborazione da parte del cervello analoga a quello che sarebbe un programma di calcolo per l'approssimazione del MCD che viene attivato quando si ascolta un tono complesso.

Per me, invece, il fenomeno del residuo rappresentava l'espressione percettiva diretta del fenomeno fisico che stavo studiando, vale a dire dell'estensione del concetto di sincronizzazione a più di due frequenze. Tale possibilità implicava che il residuo non fosse conseguenza dell'elaborazione mediante un "software" a livello corticale, come proponeva Schroeder, ma

piuttosto l'espressione di un meccanismo dinamico molto più efficiente, poiché in grado di assegnare un parametro percettivo ad uno stimolo complesso semplicemente estraendolo dalla risposta universale di un sistema dinamico sollecitato da tale stimolo. E' anche interessante notare che, a partire da quell'episodio, il mio approccio verso il problema, che partiva dalla teoria dei sistemi dinamici per spiegare il processo percettivo, cominciò a cambiare arricchendosi, dal momento che dei fenomeni percettivi suggerivano studi da fare sui sistemi dinamici.

Iniziai pertanto a studiare i rapporti numerici che potevano collegare lo stimolo con la risposta. Era chiaro per me che il caso limite del residuo era uno stimolo con solo due frequenze, cioè un intervallo musicale come nell'esempio di Schroeder, ed era intuibile che il fenomeno dovesse spiegarsi come una risonanza a tre frequenze o equivalentemente come una doppia risonanza subarmonica. In altre parole, quando c'è una sola frequenza nella forza esterna ed il rapporto tra questa e quella intrinseca è vicino ad un razionale, p/q , si produce una risonanza nella quale la frequenza fondamentale della risposta è un subarmonico della frequenza esterna, cioè $f_r = f_e/q$. Quando le frequenze esterne sono due, cioè f_{e1} e f_{e2} , il sistema dovrebbe rispondere simultaneamente con due subarmoniche determinate dai rispettivi quozienti, p/q e r/s , i quali approssimano i due rapporti di frequenza, f_{e1}/f_i e f_{e2}/f_i . Il sistema però non può rispondere simultaneamente con due frequenze differenti, per cui le uniche risposte possibili devono essere tali che i due denominatori di questi quozienti siano uguali.

Quando c'è una sola frequenza, il problema si risolve trovando gli approssimanti p/q al quoziente di frequenze f_{e1}/f_i . La soluzione completa si ottiene troncando a ordini successivi lo sviluppo in frazioni continue del quoziente, vale a dire mediante la sequenza dei convergenti (sezione 4). Il problema si può capire meglio in termini del concetto di "metrica". La metrica non è altro che la definizione della distanza. La distanza tra due punti nella metrica cosiddetta euclidea, ad esempio, viene determinata mediante il teorema di Pitagora, quindi corrisponde alla radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti su assi ortogonali di proiezione. Ma la metrica euclidea non è una metrica appropriata per descrivere le proprietà dei numeri razionali. In genere si adotta una metrica cosiddetta del "secondo tipo" secondo Kinchin⁽¹⁹⁾ che consiste nel pesare la distanza tra un numero qualsiasi ed un razionale mediante il denominatore del razionale considerato.

Ad esempio, se vogliamo calcolare la distanza tra un numero reale arbitrario, r , ed un razionale p/q , otterremo:

$$\|r-p/q\| = q|r-p/q| = |qr-p| \tag{24}$$

dove $\| \cdot \|$ indica la distanza e $| \cdot |$ indica il modulo aritmetico; questa metrica dà origine allo sviluppo in frazioni continue di un numero arbitrario. I successivi troncamenti o convergenti dello sviluppo in frazioni continue sono delle approssimazioni ottimali se si misurano le distanze con la metrica descritta nell'antecedente equazione.

Se si vuole generalizzare lo sviluppo in frazioni continue al caso di due o più frequenze conservando una metrica del secondo tipo, che significa voler approssimare due o più numeri arbitrari mediante due o più sequenze convergenti di razionali con lo stesso denominatore, si trovano delle notevoli difficoltà. Per questi casi non si conoscono algoritmi equivalenti a quello dello sviluppo in frazioni continue ⁽²⁰⁾.

Studiando questo problema per il caso di due frequenze (due numeri arbitrari), scrissi due equazioni simili alla (24) intuendo che forse mettendo le due distanze uguali, il problema potesse avere soluzione. Infatti, trovai un metodo per valutare numericamente gli approssimanti in base allo sviluppo in frazioni continue di f_1/f_2 . Se p_n/q_n , rappresenta l'approssimante di ordine n di f_1/f_2 , i rispettivi approssimanti dello stesso ordine di f_1/f_1 e f_2/f_1 si possono scrivere come,

$$p_n/(q_n-p_n) \text{ e } q_n/(q_n-p_n) \tag{25}$$

I risultati mi sembrarono interessanti, e feci i calcoli per l'esempio di Schroeder. Con disappunto vidi che non solo il valore numerico della correzione era sbagliato, ma che, addirittura, la correzione era di segno opposto: mentre la risposta percettiva cresceva passando dal primo al secondo caso, la previsione numerica decresceva. Tornai ai calcoli, accorgendomi di avere commesso un errore banale: c'era un'altra soluzione dovuta alla presenza del modulo nella eq.24. Se, come prima, p_n/q_n rappresenta il convergente di ordine n di f_1/f_2 , la sequenza di approssimanti di f_1/f_1 e f_2/f_1 per la soluzione mancante si poteva scrivere come segue,

$$p_n/(q_n+p_n) \text{ e } q_n/(q_n+p_n) \tag{26}$$

questa soluzione condivide con quella della eq.25 la proprietà di fornire distanze equivalenti secondo la metrica del secondo tipo, ma queste distanze sono minori in termini assoluti. Una volta ripetuti i calcoli sull'esempio di Schroeder, il valore calcolato per il residuo coincideva esattamente col valore riportato nel suo libro!

La mia convinzione sull'esattezza dei ragionamenti fin qui svolti subì a questo punto un impulso decisivo; per il momento, però, avevo solo un approccio basato sulla teoria dei numeri e niente di più. Sapevo che adesso era necessario vedere questi numeri in azione, era necessario trovare un sistema sperimentale dove si potesse studiare il problema e dimostrare la presenza di risposte dinamiche caratterizzate da questi numeri.

Il primo sistema al quale pensai fu il computer. Oggi si possono considerare alcuni tipi di elaborazioni al computer come veri e propri esperimenti, ed infatti si chiamano esperimenti numerici. Decisi allora di studiare l'oscillatore sul quale avevo basato la mia tesi sulla sincronizzazione con forzato periodico includendo un'altra frequenza esterna per portarlo nelle condizioni di forzato quasiperiodico. Così partì questo esperimento in collaborazione col collega argentino Osvaldo Rosso, il quale si occupò di sviluppare i programmi di calcolo mentre era in visita ad un centro di ricerca in Jülich, nella Germania (allora ovest). Passarono alcuni mesi ma le risposte cercate non si trovavano.

Decisi allora d'intraprendere una strada parallela, sulla quale avevo fatto già alcune esperienze: la simulazione mediante circuiti elettronici di tipo analogico. Disegnai allora un circuito elettronico collegato al concetto di laccio agganciato in fase (PLL o phase-locked loop, molto utilizzato in telecomunicazioni) che era possibile costruire mediante circuiti integrati commerciali.

L'analisi delle risposte in tale sistema poneva problemi di non poco conto ed allora, con la collaborazione dell'Ing. Francesco Sportolari, progettammo e costruimmo un sistema automatico di analisi, inserendo delle schede di acquisizione dati della National Instruments in un vecchio computer Macintosh IIfx e sviluppando i driver sotto LabView.

Finita la costruzione del circuito, non era ancora pronto il dispositivo di misura, ma iniziai ugualmente a fare delle prove. Stimolai il circuito con due frequenze esterne che questa volta feci coincidere con quelle di un altro esperimento sul residuo descritto da Jean Claude Risset, dell'IRCAM di Parigi. Rimasi sbalordito quando nel giro di pochi minuti vidi comparire sul frequenzimetro un valore che coincideva esattamente

con quello riportato nell'esperimento psico-acustico. Un rapido calcolo dimostro anche che questo era il valore predetto dalla teoria dei numeri e la precisione delle misure non lasciavano adito a dubbi. Erano state trovate sperimentalmente le risonanze di tre frequenze in un dispositivo reale organizzate gerarchicamente come prevedeva la teoria dei numeri razionali. Questo rappresentava un risultato interessante anche dal punto di vista della teoria dei sistemi dinamici perché, sebbene tale tipo di risposte fossero già conosciute, il nostro risultato mostrava una struttura fine a livello subarmonico la cui organizzazione gerarchica nello spazio dei parametri si poteva descrivere in base alle proprietà numeriche degli attrattori. Infatti, in modo analogo a quello che succede per il regime di sincronizzazione in oscillatori periodicamente forzati, le soluzioni caratterizzate dai numeri forniti dalla equazione 26 si possono ottenere mediante una generalizzazione della operazione di *mediante di Farey* ⁽²⁴⁾. La struttura gerarchica predetta da questa operazione si può apprezzare nella figura 11a, assieme ai dati sperimentali ottenuti mediante il dispositivo elettronico prima descritto ⁽²¹⁾.

Sulla base di questi risultati ritornammo alle simulazioni sul modello di equazioni differenziali includendo, in analogia col modello elettronico, un altro oscillatore accoppiato al primo. I risultati furono anche questa volta sorprendenti: identica struttura fine ed organizzazione gerarchica delle risonanze di tre frequenze. Gli intervalli di stabilità per il modello numerico, presentati in modo analogo a quello della figura 7, si possono vedere nella figura 11b ⁽²²⁾.

Pur avendo trovato gli stessi risultati su due sistemi diversi, questo non bastava a far pensare ad una universalità del fenomeno: poteva sempre essersi trattato di una fortunata coincidenza. Il mio collega Oreste Piro, oggi all'Università delle Isole Baleari, anche lui fisico interessato ai problemi biologici e con il quale avevo pubblicato i primi lavori sui sistemi dinamici, stava studiando da tempo il problema delle tre frequenze ma più indirizzato verso la teoria generale. Un modo molto potente di modellare il comportamento dei sistemi dinamici del continuo è quello di ridurre di una variabile la dimensionalità del problema studiando le intersezioni delle traiettorie nello spazio delle fasi con una appropriata superficie di sezione. Questo metodo è dovuto a Poincarè, ed è conosciuto, appunto, come il metodo della sezione di Poincarè. Il metodo permette di studiare un sistema del continuo mediante una ricorrenza discreta o iterazione, che risulta molto meno oneroso dal punto di vista della simulazione

numerica. Inoltre, le ricorrenze discrete hanno dinamiche molto più ricche che i sistemi di equazioni differenziali della stessa dimensionalità, e possono modellizzare il comportamento di intere classi di sistemi grazie alla proprietà di universalità, come fu dimostrato nei lavori pionieristici di Feigenbaum ⁽²³⁾.

Discutendo con il Dr. Piro sui risultati riguardanti l'organizzazione gerarchica che avevo recentemente trovato e le simulazioni che lui aveva implementato su delle ricorrenze discrete o mappe di Poincaré, trovammo delle discrepanze importanti che non riuscivamo a capire. Nacque così un nuovo aspetto del lavoro che riguardava la ricerca delle proprietà di gerarchizzazione nella ricorrenza nota come mappa del cerchio. I risultati del Dr. Piro furono, anche questa volta, completamente in linea con la teoria della organizzazione gerarchica delle risonanze di tre frequenze. Piro costruì un grafico tridimensionale (Fig. 11c) che mostra l'organizzazione delle risonanze nello spazio dei parametri e dove si osservano i collegamenti tra i diversi plateau mediante un complicato sistema di rampe che lui stesso battezzò come "rampe del diavolo", in analogia con le scale

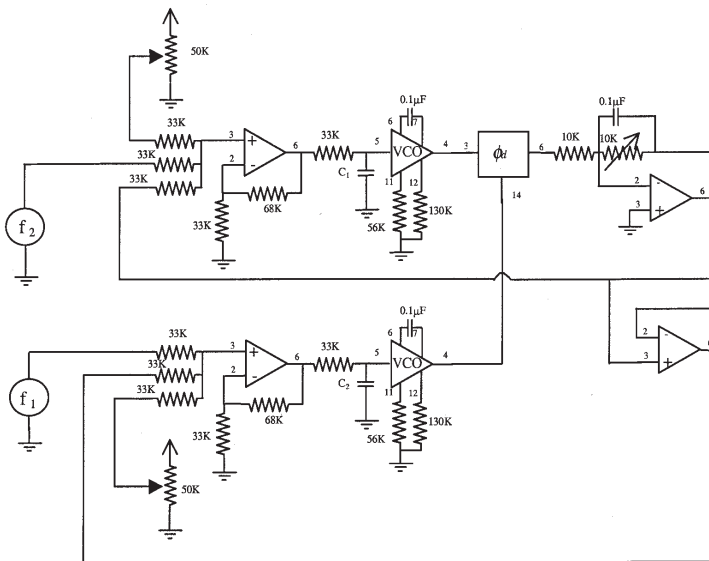


Fig. 10: Schema elettrico del sistema di oscillatori PLL accoppiati utilizzato per lo studio sperimentale delle risonanze di tre frequenze.

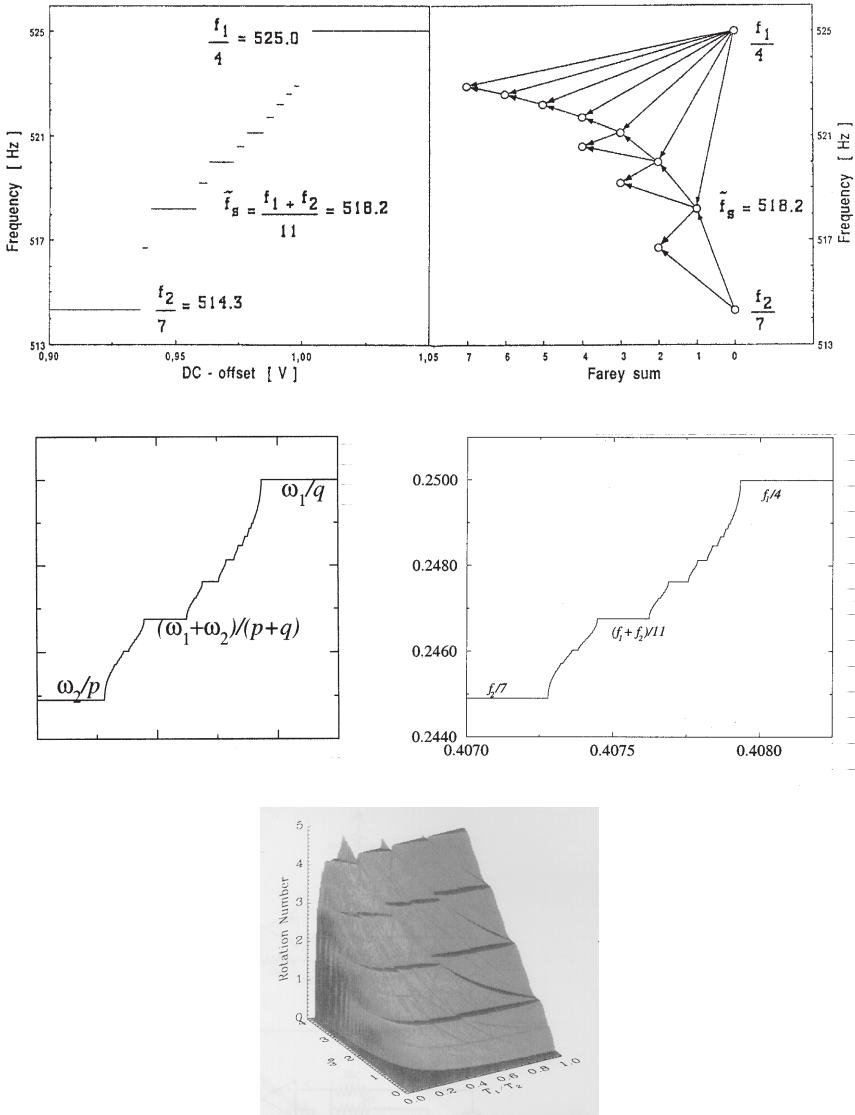


Fig. 11a-b-c-d: Universalità delle risonanze di tre frequenze. Fig. 11a, a sinistra l'analogo della scala del diavolo per il circuito elettronico della Fig. 10; sulla destra le predizioni teoriche sulla base della teoria descritta in questa sezione sotto forma di operazione di mediante di Farey generalizzata. Fig. 11b, analoghi risultati per il sistema di equazioni differenziali accoppiate. Fig. 11c, Stessi risultati per il mappa del cerchio forzato quasiperiodicamente. Fig. 11d, le rampe del diavolo ottenute sullo stesso modello.

frattali, come quella mostrata nella figura 7, note come “scale del diavolo” (fondamentalmente perché tra due gradini della scala c’è sempre un altro gradino, e ciò comporta un numero infinito di gradini tra qualsiasi due gradini). Infatti, un’adeguata sezione del grafico delle rampe (Fig. 11d), mostra che l’organizzazione trovata nel circuito e nel sistema di equazioni differenziali, analoga ad una scala del diavolo, sopravvive anche in questo modello più generale della ricorrenza discreta generata dalla mappa del cerchio, e a questo punto le prove erano, almeno per me, più che sufficienti ⁽²⁴⁾ (si confronti le Fig. 11a,b e d).

Dal punto di vista psicoacustico, la validità del modello appena descritto è stata testata mediante migliaia di dati simili a quello descritto nell’esempio di Schroeder o in quello di Risset e noti come “pitch shift” ⁽²⁵⁾. Nella figura 12 si presentano assieme questi dati. E’ da sottolineare che, partendo da un modello teorico che non si basa sulle equazioni microscopiche della dinamica neurale, mediante la tecnica della modellizzazione qualitativa si è riusciti a descrivere molto accuratamente i dati psicoacustici. Inoltre, le linee teoriche rappresentate nella figura non hanno parametri liberi, quindi non sono state aggiustate ai dati bensì rappresentano le predizioni della teoria.

Discussione del significato e problemi futuri

I risultati appena descritti, possono interessare diversi campi, che vanno dai processi percettivi a quelli cognitivi, passando per la fisiologia e le applicazioni in campo medico e ingegneristico.

Per la teoria generale della percezione uditiva e la fisiologia associata, le implicazioni sono chiare: il riconoscimento dei suoni complessi avviene grazie a meccanismi dinamici di grande efficienza e molto probabilmente a livello della coclea o dei primi nuclei di elaborazione dell’informazione uditiva (nucleo cocleare ed oliva superiore).

I sistemi di riconoscimento sono di tipo “hardware” dedicato e pertanto molto più veloci di una eventuale elaborazione tipo “software” effettuata nella corteccia uditiva. I dati a livello fisiologico sono fondamentalmente registri di potenziali medi o registri intra cellulari. E’ stato dimostrato che, già a livello del nervo uditivo, esiste informazione fisiologica sufficiente per caratterizzare completamente la struttura dei suoni complessi ⁽²⁶⁾.

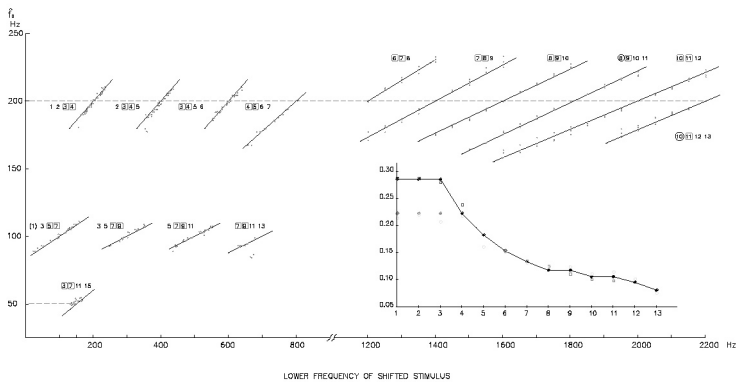


Fig. 12: Dati sperimentali da Gerson y Goldstein (range da 0 a 800 Hz.) ⁽³⁸⁾ e di Schouten el al. (range da 1200 a 2200 Hz.) ⁽³⁹⁾ che mostrano l'altezza percepita di un suono (composto da un numero variabile di parziali spaziate 200 Hz., i.e., $k\omega_0 + \Delta\omega$, $(k+1)\omega_0 + \Delta\omega$, $(k+2)\omega_0 + \Delta\omega$, ... $(k+n)\omega_0 + \Delta\omega$) in funzione della frequenza più bassa, $f = k\omega_0 + \Delta\omega$. I dati di Schouten sono per stimoli consistenti di tre componenti ($n=3$) presentati monotonicamente (tutto lo stimolo in un solo udito) e quelli di Gerson and Goldstein sono per stimolo consistenti di quattro componenti ($n=4$) presentati dicoticamente (parte dello stimolo interessante un udito ed il resto l'udito controlaterale). L'effetto di pitch shift predetto dalla teoria delle risonanze di tre frequenze (tenendo conto dell'effetto di dominanza) si mostra come linee continue sovrapposte ai dati sperimentali. Le equazioni che le descrivono sono $P = g + (f - ng) / (n + 1/2)$ per le linee primarie (quelle più in alto nella figura), $P = g/2 + (f - (n + 1/2)g) / (2n + 2)$ per le secondarie (quelle centrali) e $P = g/4 + (f - (n - 1/4)g) / (4n + 1)$ per quelle terziarie (un'unica linea in basso a sinistra). Il riquadro nella parte inferiore destra corrisponde alla media delle pendenze osservate nei dati sperimentali di Schouten, di quelli di Gerson y Goldstein e quelli di Patterson ⁽⁴⁰⁾ per stimoli di 6 e 12 componenti che rappresentano qualche migliaio di dati addizionali. La linea continua rappresenta le predizioni della teoria. L'unica discrepanza si trova nel valore di saturazione dei dati per le basse frequenze (effetto di dominanza), valore che dipende delle diverse condizioni nelle quali sono stati realizzati gli esperimenti.

Questa può essere recuperata mediante la tecnica conosciuta come di “*all order interspike histograms*” contrariamente a quella di “*first order interspike histograms*”, che presenta sensibilità all’intensità degli stimoli. Le tecniche di interspike histograms consistono nella realizzazione di un istogramma delle distanze temporali tra impulsi nervosi, successivi nel caso “*first order*”, e a tutti gli ordini nel caso “*all order*”. E’ da sottolineare che in quest’ultimo caso, gli istogrammi tendono a rafforzare gli intervalli che sono sottomultipli di uno dato, e questo è esattamente l’analogo della ricerca di risposte subarmoniche comuni, processo che si trova alla base della teoria appena enunciata.

A livello più generale, la modellizzazione qualitativa ha delle conseguenze molto importanti per l’interpretazione dei meccanismi alla base dell’elaborazione sensoriale implementata dal sistema nervoso. Le caratteristiche salienti della dinamica vengono rappresentate da comportamenti tipici che corrispondono ad attrattori robusti, soluzioni asintotiche alle quali tende la dinamica del sistema indipendentemente dalle condizioni di partenza e che sono insensibili sia a perturbazioni del sistema stesso, sia a perturbazioni degli stimoli esterni. Gli attrattori possono essere caratterizzati mediante pochi descrittori (dinamici, topologici, ecc.) e questo rappresenta un modo ideale per risolvere uno dei principali problemi con il quale si confrontano gli esseri superiori: come interagire efficientemente con un mondo fisico-chimico che è essenzialmente d’infinita complessità (in termini matematici infinito dimensionale). Gli attrattori dinamici rappresentano delle risposte stabili che riescono a ridurre in modo notevole la complessità degli stimoli e forniscono parametri di alto livello che possono essere utilizzati per caratterizzare questi stimoli e pertanto interpretarli. Si capisce l’utilità per il nostro cervello di una simile possibilità: l’informazione che viene dal mondo esterno risulta previamente setacciata ed elaborata in modo tale che solo pochi parametri significativi descrivono e classificano le infinite variabili che caratterizzano ogni complesso ambiente ecologico. In questo senso, gli attrattori agiscono come veri e propri eliminatori dinamici di ridondanza!

Per i processi cognitivi, non è escluso che la stessa strategia possa essere adottata a livello corticale. Recenti risultati nella fisiologia del sistema nervoso richiamano l’attenzione sull’utilizzazione del fenomeno della sincronizzazione per coordinare l’attività di aree lontane del cervello. Un recentissimo lavoro apparso su Nature ⁽²⁷⁾ mostra come questa

sincronizzazione avvenga per il fenomeno musicale mentre sequenze random non riescono a sincronizzare l'attività neurale. Questi risultati dimostrano anche la necessità d'includere l'aspetto dinamico nello studio delle funzioni superiori del cervello umano. I dati riportati aggiungono infatti l'asse del tempo alla visualizzazione tridimensionale, ottenuta mediante misurazioni magnetometriche dell'attività del cervello sottoposto a stimoli uditivi controllati. Merita menzione, inoltre, il fatto che i modelli qualitativi servono come emulatori della funzione biologica, soprattutto grazie alla possibilità d'implementare circuiti elettronici (in genere a tecnologia mista digitale-analogica) che presentano analoghi comportamenti dinamici. In questo senso, il semplice modello elettronico presentato nella ref. 22 può essere modificato per farlo diventare un emulatore della percezione di altezza e per incorporare altri fatti legati alla percezione di suoni complessi. La sua implementazione suggerisce un'elaborazione di tipo percettivo del segnale audio con applicazioni in campo medico e ingegneristico. Da questo punto di vista applicativo, i principali problemi da risolvere e ai quali si orienta la ricerca futura riguardano fondamentalmente la stabilità delle soluzioni cercate di fronte a perturbazioni, sia del sistema dinamico, sia degli stimoli esterni. Infatti, le risonanze di tre frequenze, come d'altra parte ogni risposta dinamica, presentano, a seconda delle regioni dello spazio delle fasi coinvolte e dei parametri del sistema, intervalli di stabilità che possono essere molto ristretti impedendo la sua utilizzazione a scopi pratici. Capire come si possano stabilizzare le risposte del sistema sugli attrattori desiderati è lo scopo di una nuova branca della teoria dei sistemi, nota come *controllo del caos* ⁽²⁸⁾. Dal punto di vista fisiologico risulta importante descrivere anche le proprietà di stabilità del sistema di fronte a perturbazioni degli stimoli, proprietà che possono essere osservate negli esperimenti di tipo psicoacustico (il modello qualitativo collega i risultati psicoacustici con quelli fisiologici perché rappresenta di fatto una delle possibili soluzioni della formulazione microscopica). Queste perturbazioni possono essere di tipo deterministico (come ad esempio l'aggiunta di linee spettrali addizionali), le quali ci portano a problemi di tipo ingegneristico (nel caso che ci interessa, alla trasmissione d'informazione mediante modulazione di ampiezza) o di tipo stocastico, che ci portano a problemi dei quali tratta un'altra giovane branca della teoria dei sistemi dinamici con importanti risvolti in biologia, lo studio della cosiddetta *risonanza stocastica* ⁽²⁹⁾. Come si sa da tempo in campo ingegneristico, l'aggiunta di rumore non sempre

peggiora le prestazioni di un sistema di elaborazione del segnale (ad es. dithering). Diversi recenti lavori mostrano come questo fenomeno, che consiste basicamente nel miglioramento del rapporto segnale-rumore di un segnale mediante l'aggiunta addizionale di un altro rumore in modo controllato, è utilizzato da diversi organismi per ottimizzare le prestazioni dei sistemi sensoriali ⁽³⁰⁾.

Purtroppo, non esiste ancora una metodologia generale per trattare un problema biologico mediante le tecniche della modellizzazione qualitativa, nonostante si stiano ottenendo significativi risultati in tal senso. Ad esempio, tecniche ed algoritmi standard sono già disponibili per analizzare serie temporali di dati, separare le sorgenti deterministiche del rumore da quelle statistiche e stimare la dimensione deterministica del sistema ⁽³¹⁾. Anche l'analisi della topologia delle soluzioni ⁽³²⁾ rappresenta un altro campo dove si dispone di tecniche ed algoritmi di validità molto generale. Altri approcci ancora consentono di ridurre la dimensionalità del sistema in forma analitica partendo da una formulazione microscopica o cercando i modi portanti della dinamica (approccio sinergetico ⁽³³⁾). Esiste anche un crescente interesse per includere i fenomeni che comportano la formazione di strutture spaziali (fenomeni di auto-organizzazione ⁽³⁴⁾, automi cellulari ⁽³⁵⁾, ecc.).

L'esempio appena descritto illustra, per un caso particolare, come alcune di queste conoscenze di base e delle tecniche applicative sviluppate nel campo della teoria dei sistemi dinamici si possano applicare con successo a problemi d'indole biologica. Come prima accennato, questo fatto non è una coincidenza fortuita o isolata da un più ampio contesto. Rappresenta invece una tendenza dentro alla quale si possono trovare altri esempi molto riusciti delle idee prima illustrate. In particolare merita menzione la descrizione della dinamica della locomozione di differenti animali e anche dell'uomo mediante le proprietà di simmetria delle risposte sincronizzate in oscillatori identici accoppiati ⁽³⁶⁾. Tale lavoro mette in evidenza l'esistenza di centri di controllo della locomozione che approfittano delle proprietà della loro dinamica per coordinare il movimento degli arti e, addirittura, per controllare il suo cambiamento qualitativo (come ad esempio da trotto a galoppo), mediante semplici biforcazioni di tipo dinamico (cambiamento qualitativo delle soluzioni). Un ultimo esempio rilevante dell'approccio qualitativo è rappresentato dalla dinamica cardiaca. In questo campo sono state raggiunte anche le tappe di tipo applicativo. Sulla base della predizione dinamica fornita dal metodo delle sezioni di Poincaré (funzione

di trasferimento di fase) e la susseguente possibilità di controllare le risposte su un attrattore desiderato (teoria del controllo)⁽³⁷⁾ si sono sviluppati *pacemakers* (già oggi presenti sul mercato) in grado di controllare diversi tipi di aritmie cardiache. Con le stesse tecniche si sta cercando di controllare le crisi epilettiche: tali crisi sono associate a una relativa sincronizzazione dell'attività neurale e potrebbero essere impedito mantenendo attive risposte più complesse come ad esempio quelle di tipo caotico.

Ringraziamenti

Voglio ringraziare il Prof. Marcello Barbieri per il suo incoraggiamento a scrivere questo articolo e molto specialmente il Dr. Marcello Zanna per i suoi suggerimenti e la lettura critica del manoscritto.

BIBLIOGRAFIA

- [1]- "*Can physics deliver another biological revolution?*". *Nature*, vol. 397, n.6715, pp. 89, [1999].
- [2]- Gonzalez, D.L., "*Sincronización y caos en osciladores no lineales*", PhD Tesis, Universidad Nacional de La Plata, Argentina [1987].
- [3]- Gonzalez, D.L. and Piro, O., "*Chaos in a nonlinear oscillator with exact solution*". *Phys. Rev. Lett.* **50**, pp. 870-872 [1983].
- [4]- Cartwright, J.H.E., Gonzalez, D.L., and Piro, O., "*Teoria dei Sistemi Dinamici: una base matematica per i fenomeni non-lineari in biologia*", *Systema Naturae*, vol. 2, pp. 215-254, [1999].
- [5]- Glass, L., Perez, R., "*Fine Structure of Phase-locking*", *Phys. Rev. Lett.* **48**, pp.1772, [1982] - Glass, L., Guevara, M.R., Shrier, A. and Perez, R., "*Bifurcations and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator*", *Physica 7D*, pp.89, [1983].
- [6]- Winfree, A.T., "*The Geometry of Biological Time*", Springer-Verlag, Berlin, [1980].
- [7]-D. L. Gonzalez y O. Piro, "*One dimensional Poincaré map for a non-linear driven oscillator, analytical derivation and geometrical properties*", *Phys. Lett.* 101A, 455 [1984].

- [8]- A.Campbell, A.Gonzalez, D.L.Gonzalez, H.Larrondo y O.Piro, “*Estudio numérico del oscilador de van-der-Pol en conexión con la cinética de reacciones químicas*” - Terceras Jornadas Argentinas de Informática en las Ciencias Químicas, Buenos Aires, [1986] - P.D.Sisterna, M.O.Magnasco, O.Piro y D.L.Gonzalez, “*Medición experimental de la función de transferencia de fase en osciladores de relajación*”, Reunión Nacional de Física, Córdoba, [1986]- G.V.Savino y D.L.Gonzalez, “*Evidencias de comportamiento caótico en ventrículos de sapo*”, Reunión Nacional de Física, Córdoba, [1986].
- [9]- Savino, G.V., Romanelli, L., Gonzalez, D.L., Piro, O. and Valentinuzzi, Max, E., “*Evidence for chaotic behavior in driven ventricles*”, *Biophys. J.*, **56**, pp. 273-280, [1989].
- [10]- Poincaré, H., «*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*», Gautiers-Vilars, Paris, [1892].
- [11]- Gonzalez, D.L. and Rosso, O.A., “*Qualitative modelling of complex biological systems: a nonlinear dynamical system approach*”, II Italian-Latinamerican Conference on Applied and Industrial Mathematics, Roma, [1997] - Gonzalez, D.L., Rosso, O.A. and Garcia Nieto, P.J., “*Nonlinear dynamical model for control of tissue growth*”, *Proceedings of Primer Coloquio Latinoamericano de Matemática Aplicada a la Industria y a la Medicina*, Buenos Aires, [1996]”.
- [12]- Huntley, H.E. “*The Divine Proportion: A Study In Mathematical Beauty*”, Dover, [1970].
- [13]- Fondi, R., “*Armonistica: un ponte di collegamento tra la natura e la psiche*” *Systema Naturæ*, v. **1**, pp. 255-300, [1998] – Ledvai, E., “*Duality and synthesis in the music of Bela Bartok*”, in Kepes, G., editor *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm*, George Braziller, [1966].
- [14]- *The Fibonacci Quarterly*.
- [15]- Manfred Schroeder, “*Number Theory in Science and Communication*”, Springer-Verlag, Berlin, [1984].
- [16]- Gonzalez, D.L., Morettini, L., Sportolari, F., Rosso, O., Cartwright, J.H.E. and Piro, O. “*Pitch perception of complex sounds: Nonlinearity revisited*”, *Proceedings of CIARM*, Ferrara, [1985].
- [17]- von Hemholtz, H.L.F., “*On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*”, 4th ed. Trans. A.J. Ellis, Dover, New York, [1954].
- [18]- Schouten, J.F., Ritsma, R.J., and Lopes Cardozo, B., “*Pitch of the residue*”, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol 34, pp. 1418-1424, [1962].
- [19]- Kinchin, A.Y., “*Continued Fractions*”, University of Chicago Press, [1964].

- [20]- Kim, S. and Ostlund, S., Phys. Rev. Lett., **55**, pp. 1165, [1985] - Kim, S. and Ostlund, S., Phys. Rev. A **34**, pp. 3426, [1986].
- [21]- O. Calvo, J. Cartwright, D.L. Gonzalez, O. Piro and F. Sportolari, “*Three-frequency resonances in coupled phase-locked loops*”, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, vol. 47, n. 4, pp. 491-497, [2000].
- [22]- J. Cartwright, D.L. Gonzalez, O. Piro and O. Rosso, “*Three frequency resonances in dynamical systems*” Int. J. on Bifurcation and Chaos, vol. 9, n. 11, pp. 2181-2187, [1999].
- [23]- Feigenbaum, M., “*Universal behavior in nonlinear systems*”, Los Alamos Sci., **1**, pp. 4-27, [1980].
- [24]- J. Cartwright, D.L. Gonzalez and O. Piro, “*Universality in three-frequency resonances*” Physical Review E, Vol. 59, n. 3, 2902-2906 [1999].
- [25]- Cartwright, J.H.E., Gonzalez, D.L., and Piro, O., “Nonlinear dynamics of the perceived pitch of complex sounds”, - Phys. Rev. Lett. 82, pp. 5389-5392, [1999] - J. Cartwright, D.L. Gonzalez and O. Piro, “The pitch of complex tones: an analysis via universality in nonlinear dynamics”, submitted to PNAS [2000] - J. Cartwright, D.L. Gonzalez and O. Piro, “A new nonlinear model for pitch perception”, Lectures Notes in Physics, Statistical Mechanics of Biocomplexity, D. Reguera, J. M. G. Vilar and J. M. Rubi (Eds), Springer, [1999] – Nel sito <http://www.imedea.uib.es/~piro/PitchPage> si possono ascoltare esempi audio dimostrativi della teoria.
- [26]- Cariani, P.A., and Delgutte, B., “*Neural correlates of the pitch of complex tones I, Pitch and pitch salience*”, J. Neurophysiol. **76**, pp. 1698-1716, [1996].
- [27]- Patel, A.D. and Balaban, E., “*Temporal patterns of human cortical activity reflect tone sequence structure*”, Nature, vol. 404, pp. 80-85, [2000] – Elbert, T. and Keil, A., “*Imaging in the fourth dimension*”, Nature News, Nature, vol. 404, pp. 29-30, [2000].
- [28]- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.C., Mancini, H. and Maza, D., “*The control of chaos, theory and applications*”, Physics Reports, 329, pp. 103-197, [2000].
- [29]- Gammaitoni, L., Hänggi, P., Jung, P. and Marchesoni, F., “*Stochastic resonance*”, Reviews of Modern Physics, vol. 70, n.1, pp. 223-288, [1998] - Landa, P.S. and McClintock, P.V.E., “*Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise*”, Physics Reports, 323, pp. 1-80, [2000].

[30]- Levin, J.E. and Miller, J.P., “*Broadband neural encoding in the cricket cercal sensory system enhanced by stochastic resonance*”, *Nature*, vol. 380, pp. 165-168, [1996] – Richardson, K.A., Imhoff, T.T., Grigg, P. and Collins, J.J., “*Using electrical noise to enhance the ability of humans to detect subthreshold mechanical cutaneous stimuli*”, *Chaos*, vol. 8, n.3, pp. 599-603, [1998] - Simonotto, E., Riani, M., Seife, C., Roberts, M., Twitty, J. and Moss, F., “*Visual perception of stochastic resonance*”, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, n.6, pp. 1186-1189, [1997] – Moss, F., Chioutan, F. and Klinke, R., “*Will there be noise in their ears?*”, *Nature Medicine*, vol. 2, n.8, pp. 860-862, [1996] – Morse, P.M. and Evans, E.F., “*Enhancement of vowel coding for cochlear implants by addition of noise*” *Nature Medicine*, vol. 2, n.8, pp. 928-932, [1996] - Adair, R.K., Astumian, R.D. and Weaver, J.C., “*Detection of weak electric fields by sharks, rays and skates*”, *Chaos*, vol.8, n.3, pp. 576-587, [1998].

[31]-Hegger, R., Kantz, H. and Schreiber, T., “*Practica implementation of nonlinear time series methods: the TISEAN package*”, *Chaos*, 9, pp 413, [1999] (questo software è di dominio pubblico e si può scaricare dal sito <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean>) - Abarbanel, H.D.I., “*Analysis of observed chaotic data*”, Springer, Berlin, [1996] - Schreiber, T., “*Interdisciplinary application of nonlinear time series methods*”, *Phys. Rep.*, 308, pp.2, [1998] - Kantz, H. and Schreiber, T., “*Nonlinear time series analysis*”, Cambridge University Press, Cambridge, [1997] - Mignani, S., Giannerini, S. and Gonzalez, D.L., “*Test di nonlinearità per la ricerca di un’eventuale dinamica caotica nel sistema cardiovascolare*”, III Congresso Nazionale della Società Italiana di Biometria, Roma, [1999].

[32]-Gilmore, R., *Rev. Mod. Phys.*, **70**, pp. 1455, [1998] – Mindlin, G.B., Solari, H.G., Natiello, M.A., Gilmore, R. and Hou, X.J., *Nonlinear Sci.*, **1**, pp. 147, [1991] - Gonzalez, D.L., Mindlin, G.B. and Romanelli, L., “*Gyration number and topology of the period-doubling bifurcation*”, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. **5**, n.5, pp. 1046-1050, [1988].

[33]-Haken, H., “*Principles of Brain Functioning, a Synergetic Approach to Brain Activity, Behavior and Cognition*”, Springer Series in Synergetics, [1996].

[34]-Bak, P., Tang, C. and Wiesenfeld, K., *Phys. Rev. Lett.*, **59**, pp. 381, [1987] – Carlson, J.M., Chayes, J.T., Grannan, E.R. and Swindle, G.H., *Phys. Rev. Lett.*, **65**, pp. 2547, [1990].

[35]-Murray, J.D., “*Mathematical Biology*”, Biomathematical Texts, Springer, [1993].

- [36]-Collins, J.J. and Stewart, I.N., “*Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits*”, 4/1990, Mathematics Institute, University of Warwick, [1990].
- [37]-Ditto, W.L. and Pecora, L.M., “*Mastering Chaos*”, Scientific American, vol. 269, n.2, pp. 78-84, [1993] Garfinkel, A., Weiss, J., Ditto, W. and Spano, M., Trends Cardiovasc. Med., **5**, pp. 76, [1995] - Glass, L., “*Dynamic of Cardiac Arritmias*”, Physics Today, August 1996, pp. 40-45. [1996].
- [38]-Gerson, A. and Goldstein, J.L., “*Evidence for a template in optimal processing for pitch of complex tones*”, J. Acoust. Soc. Am., **63**, pp.498-510, [1978].
- [39]-Schouten, J.F., Ritsma, R.J. and Cardoso, B.L., “*Pitch of the residue*”, J. Acoust. Soc. Am., **34**, pp.1418-1424, [1962].
- [40]-Patterson, R.D., “*The effects of relative phase and the number of components on residue pitch*”, J. Acoust. Soc. Am., **53**, pp.1565-1572, [1973].